Números Complexos

Introdução: Um pouco de História

Houve um momento na História da Matemática em que a necessidade de expressar a raiz de um número negativo se tornou fundamental. Em equações quadráticas do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Temos uma fórmula fechada para sua resolução, que é a fórmula para equações de 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O número Δ é o discriminante da equação e para:

- $\Delta > 0$, temos 2 raízes reais;
- $\Delta = 0$, temos uma raiz real;
- $\Delta < 0$, não temos nenhuma raiz real e aqui que se encontrava o problema: Como expressar a raiz de Δ se $\Delta < 0$? Isso implicaria em dizer que: qual o número elevado ao quadrado resulta um número negativo?

Então, se tivermos a equação:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Vemos que caímos num caso particular em que a fórmula para a equação de 2º grau não encontra raízes reais. Para contornar este problema, Bombelli admitiu que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1}$$

Assim, considerando um novo tipo de número.

Leonard Euler (1707 – 1783) usou em 1777 a letra *i* para representar o número $\sqrt{-1}$, chamando-o de unidade imaginária, pois $i^2 = -1$.

Logo, seria possível encontrar uma solução para a equação:

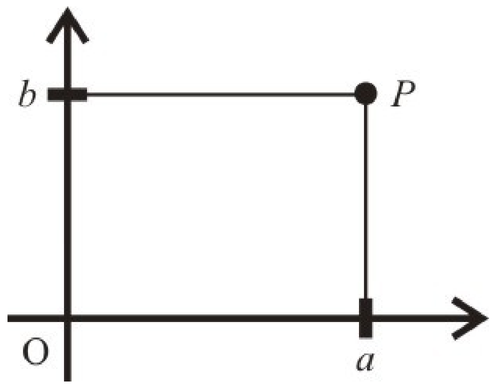
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Fazemos:

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = 2 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

Surgiu, assim, um novo tipo de número, chamado por Gauss de Número Complexo, sendo expresso por:

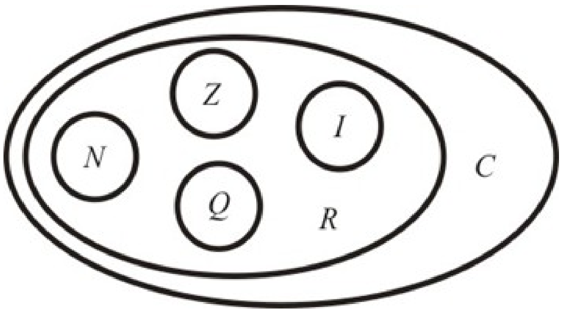
Gauss, por volta de 1800, associou a cada número na forma *a* + *bi* um ponto *P* do plano cartesiano, definido pelo par ordenado (*a, b*):



[Figura 1]

Conseqüentemente, foi criado um novo conjunto numérico chamado de Conjunto dos Números Complexos e podemos fazer uma representação por diagramas de

Venn:



[Figura 2]

Elementos do Conjunto Complexo

Um número complexo costuma-se ser simbolizado pela letra *z*. Qualquer elemento de *z* de *C* tem a forma:

$$z = a + bi \quad , \quad \text{com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Sendo:

- *a* a parte Real Re(*z*)
- *b* a parte Imaginária Im(*z*)

Oposto de um Número Complexo

O oposto de um número complexo:

$$z = a + bi$$

É o número complexo:

$$-z = -a - bi$$

Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

São iguais, se, e somente se:

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \Leftrightarrow a = c$$

$$\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \Leftrightarrow b = d$$

Adição e Subtração de Números Complexos

Dado dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos para a:

Adição:

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 + z_2 = [\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)] + i[\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)]$$

Subtração:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$z_1 - z_2 = a + bi - c - di$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

$$z_1 - z_2 = [\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)] + i[\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)]$$

Conjugado de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, o conjugado de z é denominado por $\overline{z}$ e é dado por:

$$\overline{z} = a - bi \Leftrightarrow z = a + bi$$

Notem que:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$z \cdot \overline{z} = a^2 - abi + abi - b^2 i^2$$

$$z \cdot \overline{z} = a^2 - b^2 i^2$$

Mas $i^2 = -1$, logo:

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

Multiplicação de Números Complexos

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, o produto $z_1 . z_2$ é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi + bdi^2$$

Mas $i^2 = -1$, logo:

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + cbi - bd$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd)(ad + bc)i$$

Divisão de Números Complexos

Dado dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$, o quociente z_1 / z_2 é obtido multiplicando ambos termos pelo conjugado do divisor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2 i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + cbi + bd}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Separando a parte Real da Imaginária, obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Inverso de um Número Complexo

Dado um número complexo não – nulo $z = a + bi$, o inverso deste número é dado por:

$$z = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$$

Ainda podemos escrever z^{-1} como:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Potência de *i* com Expoente Natural

Com relação às potências de *i* com expoente natural, temos que:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Percebemos que as potências se repetem de 4 em 4. Então, para calcular indicaremos q como quociente e R como resto da divisão de n por 4:

$$\begin{array}{l|l} n & \underline{4} \\ R & q \end{array}$$

Daqui temos que $n = 4q + R$. Logo:

$$i^n = i^{4q+R}$$

$$i^n = i^{4q} \cdot i^R$$

$$i^n = (i^4)^q \cdot i^R$$

Mas , logo:

$$i^n = i^R$$

Portanto, para calcular i^n, basta calcular i^R, onde R é o resto da divisão de n por 4.

Plano de Argand – Gauss

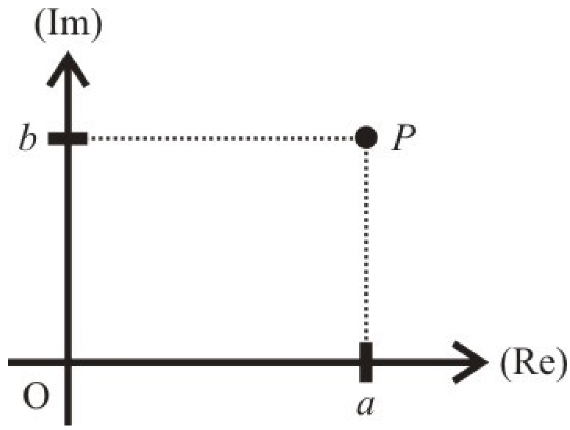
Como já foi dito na introdução deste estudo, Gauss associou a cada número $z = a + bi$, um ponto P do Plano Cartesiano.

A parte Real (Re) do complexo é representada por um ponto no eixo horizontal e este é chamado de Eixo Real.

A parte Imaginária (Im), por sua vez, é representada por um ponto no eixo vertical, chamado de Eixo Imaginário.

O ponto P, correspondente ao número complexo $z = a + bi$ é chamado de imagem ou afixo de z.

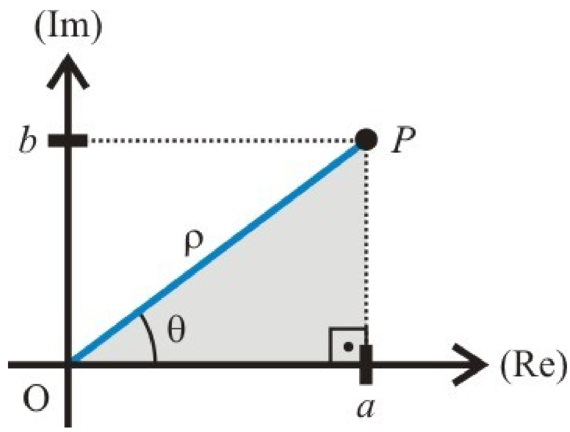
A interpretação geométrica dos complexos foi descoberta em 1797 por Caspar Wessel (1745 – 1818), mas somente em 1806, o matemático suíço Jean Robert Argand (1768 – 1822) publicou um artigo sobre a representação gráfica dos números complexos. Gauss já havia concebido tal representação, mas si a publicou 30 anos após a publicação de Wessel. Hoje, o plano dos números complexos é conhecido com Plano de Gauss ou Plano de Argand – Gauss e é representado como:



[Figura 3: Plano de Argand-Gauss]

Módulo e Argumento de um Número Complexo

No Plano de Gauss, a distância da origem até o ponto *P* é chamada de módulo e representada pó $|z|$, indicada na figura abaixo pela letra grega ρ (Rô):



[Figura 2: módulo]

Para calcularmos a distância ρ, aplicamos o teorema pitagórico no triângulo *Opa*:

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Algumas propriedades podem ser destacadas:

1) $|z| \geq 0$

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$3)\quad |z_1| = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$4)\quad |\bar{z}| = |z|$$

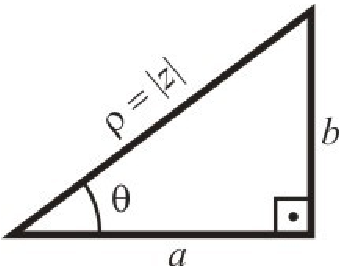
$$5)\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$6)\quad |z|^n = |z^n|$$

O ângulo formado pela reta suporte de *OP* e o Eixo Real é denominado por θ, sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e é chamado de argumento de z, para $z \neq 0$ e indicamos por ARG(z). Podemos escrever:

$$\theta = \text{ARG}(z)$$

Tomando o triângulo retângulo *Opa* da figura 1, temos:



[Figura 5: triângulo retângulo]

Daqui obtemos as relações:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

Seja o número complexo em sua forma algébrica $z = a + bi$, sendo $z \neq 0$. Das relações trigonométricas observadas na figura 3, temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$$

Se substituirmos essas relações na forma algébrica de z obteremos:

$$z = a + bi$$

$$z = \rho \cdot \text{sen}(\theta) + \rho \cdot \text{sen}(\theta)\ i$$

$$z = \rho\big(\text{sen}(\theta) + i\cos(\theta)\big)$$

A forma polar de z é muito útil para efetuarmos potenciação e radiciação de números complexos.

Produto de Números Complexos na Forma Polar

Dados os números complexos em sua forma polar:

$$z_1 = \rho_1\big(\text{sen}(\theta_1) + i\cos(\theta_1)\big)$$

$$z_2 = \rho_2\big(\text{sen}(\theta_2) + i\cos(\theta_2)\big)$$

O produto entre z_1 e z_2 é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\big(\text{sen}(\theta_1) + i\cos(\theta_1)\big) \cdot \rho_2\big(\text{sen}(\theta_2) + i\cos(\theta_2)\big)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[&\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + i\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) + \\ &+ i\cos(\theta_2)\,\text{sen}(\theta_2) + i^2\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\big[&\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\big) + \\ &+ i\ (\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_2)\cos\ (\theta_1))\big] \end{aligned}$$

Mas, sabemos que:

$$\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\big) = \cos\ (\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$(\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1)) = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

[Veja aqui as demonstrações da Soma e Subtração de arcos]

Logo:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Por indução temos que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n =$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cdots \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Divisão de Números Complexos na Forma Polar

Dados os números complexos em sua forma polar:

$$z_1 = \rho_1\left(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1)\right)$$

$$z_2 = \rho_2\left(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2)\right)$$

A divisão entre z_1 e z_2 é dada por:

$$(1) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1)\right)}{\rho_2\left(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2)\right)} \cdot \frac{\left(\cos(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\right)}{\left(\cos(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\right)}$$

Vamos fazer, separadamente, as multiplicações do numerador e denominador da equação (1):

Numerador:

$$\rho_1\left(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1)\right) \cdot \rho_1\left(\cos(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\right)$$

$$\rho_1[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1) +$$

$$+\, i\,\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - i^2\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)]$$

$$\rho_1[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) +$$

$$+i(\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1))]$$

$$\boxed{(2) \quad \rho_1[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Denominador:

$$\rho_2\left(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2)\right) \cdot \left(\cos(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\right)$$

$$\rho_2[\cos^2(\theta_2) - i\,\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) +$$

$$+i\,\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) - i^2\text{sen}^2(\theta_2)]$$

$$\rho_2[\cos^2(\theta_2) + \text{sen}^2(\theta_2)]$$

Pela relação trigonométrica fundamental, temos que:

$$\cos^2(\theta_2) + \text{sen}^2(\theta_2) = 1$$

Logo:

$$\boxed{(3) \quad \rho_2}$$

Substituímos, agora, (2) e (3) em (1) e obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos(\theta_1) + i\ \mathrm{sen}(\theta_1)\right)}{\rho_2\left(\cos(\theta_2) + i\ \mathrm{sen}(\theta_2)\right)} \cdot \frac{\left(\cos(\theta_2) - i\ \mathrm{sen}(\theta_2)\right)}{\left(\cos(\theta_2) - i\ \mathrm{sen}(\theta_2)\right)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}{\rho_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potenciação de Números Complexos na Forma Polar - (Primeira Fórmula de De Moivre)

Dado um número complexo não-nulo em sua forma polar

$z = \rho_1[\cos(\theta) + i\ \mathrm{sen}(\theta)]$ e um número $n \in \mathbb{N}$

A n-ésima potência de *z* será dada por:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)]$$

Para maiores detalhes consulte a demonstração da Primeira Fórmula de De Moivre **aqui**.

Radiciação de Números Complexos na Forma Polar - (Segunda Fórmula de De Moivre)

Dado um número complexo não-nulo em sua forma polar $z = \rho_1[\cos(\theta) + i\ \mathrm{sen}(\theta)]$

A n-ésima raiz de *z* será dada por:

$$z_w = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Para maiores detalhes consulte a demonstração da Primeira Fórmula de De Moivre **aqui**.

Veja mais:

Demonstração da Primeira Fórmula de Demoivre;

Demonstração da Segunda Fórmula de Demoivre;

Aplicação da Segunda Fórmula de De moivre;

Adição e Subtração de arcos;

Relação Trigonométrica Fundamental;

fonte deste texto:- http://obaricentrodamente.blogspot.com/

29/05/2010